



Equipo de Cátedra: TANIA N. GIMENEZ • LUIS A. MICUCCI • PABLO GIROLLET

Trabajo Práctico N^{ro} 6. Sistemas de ecuaciones.

Ej. 1 — Graficar las siguientes rectas en el plano cartesiano.

a. $y = 2x + 5$ b. $y = -3x - 1$ c. $y = -2$ d. $x = 1$ e. $y = \frac{5}{3}x + 2$

Ej. 2 — En cada uno de los siguientes incisos, verificar si el punto indicado es solución del sistema de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ $P_a = (1, 1), P_b = (2, 1)$ b. $\begin{cases} 5x - y = -5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $P_a = (-1, 0), P_b = (0, 5)$

c. $\begin{cases} -x - y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ $P_a = (4, 1), P_b = (2, 2)$

Ej. 3 — Comprobar gráficamente las respuestas obtenidas en el Ej. 2.

Ej. 4 — Dada la ecuación $2x + 4y = -2$, indicar una segunda ecuación para que en cada caso se verifique la condición indicada. Armar un sistema diferente para cada inciso (puede haber más de una respuesta posible).

- a. El punto $P = (1, -1)$ sea solución. b. El sistema tenga una única solución.
c. El sistema tenga infinitas soluciones. d. El sistema no tenga soluciones.

Ej. 5 — En cada uno de los siguientes incisos, escribir un sistema de ecuaciones que cumpla las condiciones indicadas (completar las constantes que sean necesarias).

- a. $a_{11} = 2, a_{12} = 6, a_{21} = 6, a_{22} = 7, P = (1, 4)$ es solución
b. $a_{11} = -1, a_{12} = 4, a_{21} = 6, a_{22} = 0, P = (3, 6)$ no es solución
c. $a_{11} = 4, a_{21} = 2, b_1 = 9, b_2 = 17, P = (1, 5)$ es solución

Ej. 6 — Resolver los siguientes sistemas utilizando la técnica de sustitución.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -3x - 9y = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ -5x - y = -3 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 9x + 11y = 20 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$

Ej. 7 — Volver a resolver los mismos sistemas de ecuaciones del ejercicio anterior, pero utilizando la técnica de eliminación de Gauss.

$$\text{a. } \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -3x - 9y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 5x + y = 3 \\ -5x - y = -3 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 9x + 11y = 20 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$$

Ej. 8 — Resolver los siguientes sistemas utilizando la técnica que se considere más apropiada.

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + 3y - 8z = -47 \\ x + y + z = 3 \\ 5x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

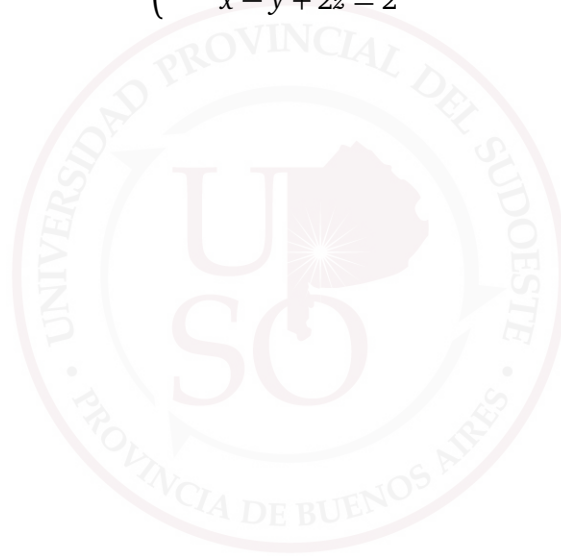
$$\text{b. } \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 5x + 6y + z = 1 \\ -17x + 3y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

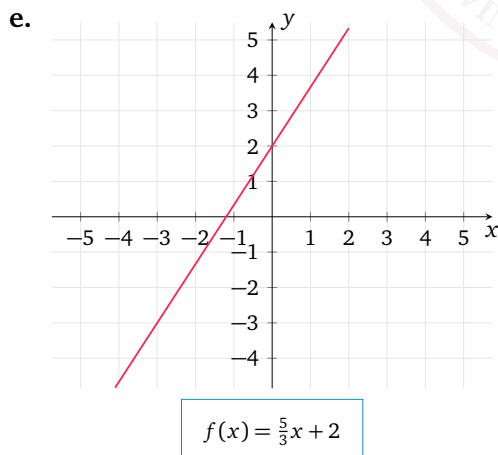
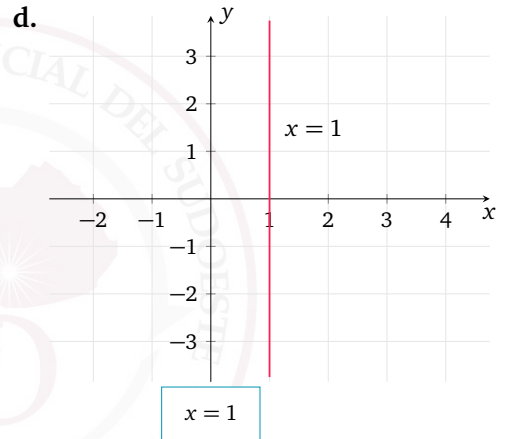
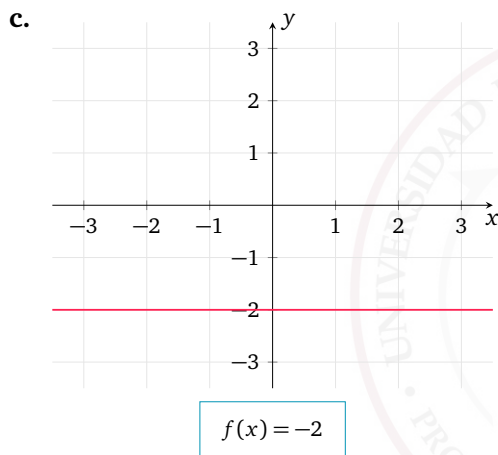
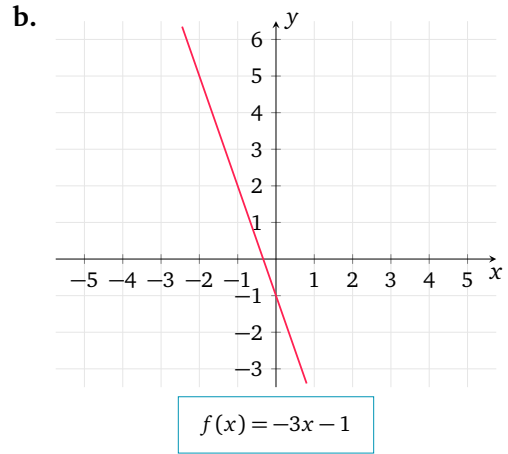
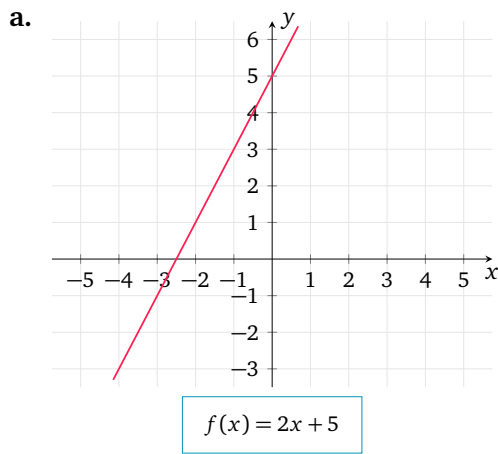
$$\text{d. } \begin{cases} x + y - z = 7 \\ 4x - y + 5z = 4 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} -2x - 6y - 3z = 9 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} -x + z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$$



Solución del ejercicio 1



Solución del ejercicio 2

Para verificar si los puntos indicados son soluciones de los sistemas de ecuaciones dados, sustuiremos las coordenadas de cada punto (x, y) en ambas ecuaciones de cada sistema y comprobaremos si se satisfacen simultáneamente. Un punto es una solución si, al sustituirlo, ambas ecuaciones resultan en igualdades verdaderas. Analizaremos cada inciso paso a paso y justificaremos los cálculos.

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

Punto $P_a = (1, 1)$:

- Ecuación 1: $2(1) + 4(1) = 2 + 4 = 6$, que es igual a 6. Verdadera.
- Ecuación 2: $1 - 3(1) = 1 - 3 = -2$, que es igual a -2. Verdadera.
- Conclusión: $P_a = (1, 1)$ es una solución .

Punto $P_b = (2, 1)$:

- Ecuación 1: $2(2) + 4(1) = 4 + 4 = 8$, que no es igual a 6. Falsa.
- Ecuación 2: $2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$, que no es igual a -2. Falsa.
- Conclusión: $P_b = (2, 1)$ no es una solución

$$\text{b. } \begin{cases} 5x - y = -5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Punto $P_a = (-1, 0)$:

- Ecuación 1: $5(-1) - 0 = -5 - 0 = -5$, que es igual a -5. Verdadera.
- Ecuación 2: $2(-1) + 0 = -2 + 0 = -2$, que no es igual a 5. Falsa.
- Conclusión: $P_a = (-1, 0)$ no es una solución.

Punto $P_b = (0, 5)$:

- Ecuación 1: $5(0) - 5 = 0 - 5 = -5$, que es igual a -5. Verdadera.
- Ecuación 2: $2(0) + 5 = 0 + 5 = 5$, que es igual a 5. Verdadera.
- Conclusión: $P_b = (0, 5)$ es una solución.

$$\text{c. } \begin{cases} -x - y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

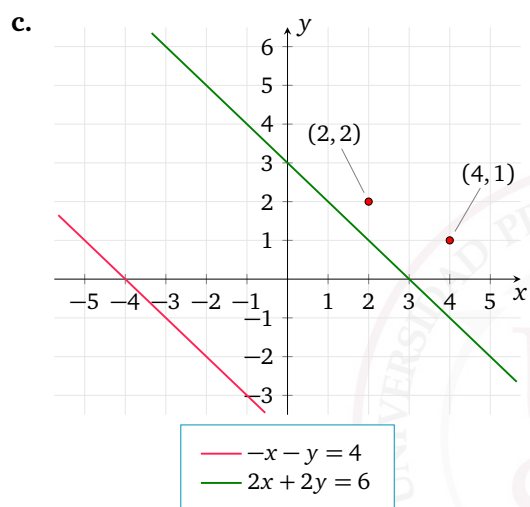
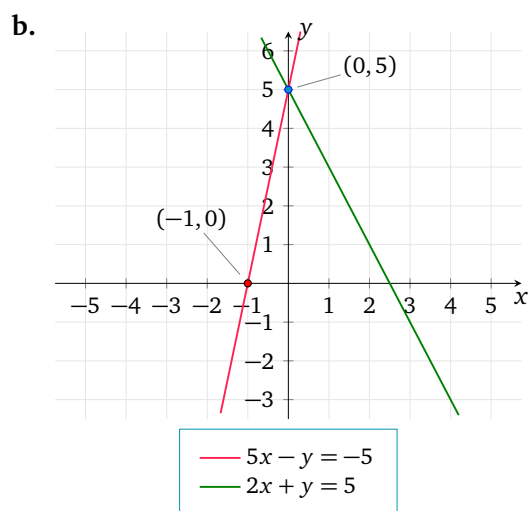
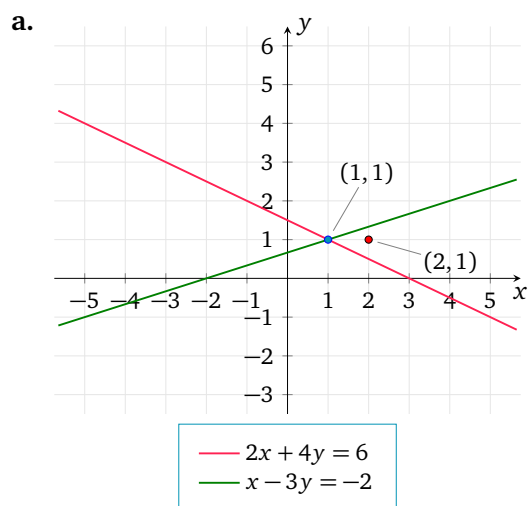
Punto $P_a = (4, 1)$:

- Ecuación 1: $-4 - 1 = -5$, que no es igual a 4. Falsa.
- Ecuación 2: $2(4) + 2(1) = 8 + 2 = 10$, que no es igual a 6. Falsa.
- Conclusión: $P_a = (4, 1)$ no es una solución.

Punto $P_b = (2, 2)$:

- Ecuación 1: $-2 - 2 = -4$, que no es igual a 4. Falsa.
- Ecuación 2: $2(2) + 2(2) = 4 + 4 = 8$, que no es igual a 6. Falsa.
- Conclusión: $P_b = (2, 2)$ no es una solución.

Solución del ejercicio 3



Solución del ejercicio 4

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

puede tener una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución. A continuación, se analizan estas posibilidades desde un punto de vista analítico y geométrico.

CARACTERIZACIÓN ANALÍTICA

Para determinar el número de soluciones del sistema (1)–(2), analizamos las ecuaciones comparando sus coeficientes y términos independientes. Podemos resolver el sistema utilizando métodos como sustitución o eliminación.

Caso 1: Una única solución

El sistema tiene una única solución si los coeficientes de las rectas no son proporcionales, es decir, si:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Esto implica que las ecuaciones son linealmente independientes y que las dos ecuaciones representan rectas con pendientes distintas. Para encontrar la solución, podemos usar el *método de eliminación* o *sustitución*.

Caso 2: Infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado)

El sistema tiene infinitas soluciones cuando las dos ecuaciones representan la misma recta, lo que ocurre si los coeficientes y los términos independientes son proporcionales:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{si } a_2, b_2, c_2 \neq 0).$$

En este caso, una ecuación es un múltiplo escalar de la otra, y todas las soluciones de una ecuación también satisfacen la otra. Las soluciones pueden parametrizarse, por ejemplo, expresando y en términos de x (o viceversa) a partir de una de las ecuaciones. Al intentar resolver el sistema se llega a una identidad.

Caso 3: Ninguna solución (sistema incompatible)

El sistema no tiene solución cuando las ecuaciones representan rectas paralelas no coincidentes, lo que ocurre si los coeficientes son proporcionales pero los términos independientes no lo son:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{si } a_2, b_2, c_2 \neq 0).$$

Al intentar resolver el sistema (por ejemplo, mediante eliminación), se obtiene una contradicción, como $0 = k$ (donde $k \neq 0$), indicando que no existe un par (x, y) que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente.

CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA

Geoméricamente, cada ecuación (1) y (2) representa una recta en el plano \mathbb{R}^2 . El número de soluciones corresponde al número de puntos de intersección entre estas rectas.

Caso 1: Una única solución

Si $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ (pendientes distintas, asumiendo $b_1, b_2 \neq 0$), las rectas se intersecan en exactamente un punto. Este punto de intersección es la solución única (x, y) .

Caso 2: Infinitas soluciones

Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, las dos ecuaciones representan la misma recta. Por lo tanto, todos los puntos de la recta son soluciones, lo que resulta en infinitas soluciones.

Caso 3: Ninguna solución

Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, las rectas tienen la misma pendiente (son paralelas) pero diferentes ordenadas al origen. Como las rectas paralelas no se intersecan, no existe solución.

CONCLUSIÓN

El comportamiento de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se determina por la relación entre los coeficientes y los términos independientes:

- **Única solución:** Pendientes distintas $(\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2})$, rectas que se intersecan en un punto.
- **Infinitas soluciones:** Coeficientes y términos independientes proporcionales $(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2})$, rectas coincidentes.

- **Ninguna solución:** Coeficientes proporcionales pero términos independientes no proporcionales ($\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$), rectas paralelas distintas.

Esta caracterización analítica y geométrica proporciona una comprensión clara de las soluciones de dichos sistemas.

Para resolver el ejercicio partiremos de la ecuación dada $2x + 4y = -2$ y propondremos una segunda ecuación en cada inciso que cumpla con la condición especificada. Cada sistema será diferente y estará diseñado para satisfacer el requisito indicado. Usaremos la forma general de una ecuación lineal $ax + by = c$ y ajustaremos los coeficientes según sea necesario.

a. El punto $P = (1, -1)$ sea solución.

Buscamos entonces una ecuación de la forma

$$ax + by = c \tag{3}$$

de manera que el punto $P(1, -1)$ sea solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ ax + by = c \end{cases}$$

Sustituimos $x = 1$ y $y = -1$ en la ecuación (3):

$$a(1) + b(-1) = c \implies a - b = c$$

Por ejemplo, si elegimos $a = 5$ y $b = 1$ ¹, entonces

$$c = 5 - 1 = 4$$

Así, una posible segunda ecuación es:

$$5x + y = 4$$

Entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

Conclusión.

El punto $(1, -1)$ verifica ambas ecuaciones:

$$2(1) + 4(-1) = 2 - 4 = -2$$

$$5 \cdot 1 + (-1) = 5 - 1 = 4$$

El punto $(1, -1)$ es una solución única del sistema.

b. El sistema tenga una única solución.

Para que el sistema tenga una única solución, las dos ecuaciones deben ser **no proporcionales**, es decir, sus coeficientes no deben ser múltiplos uno del otro.

¹La única condición para la elección de valores para a y para b es que el punto $P(1, -1)$ sea solución de la ecuación $ax + by = c$,. Otra elección que cumpla la condición solicitada llevará a obtener una respuesta diferente a la aquí dada.

La ecuación original es:

$$2x + 4y = -2$$

Podemos proponer, por ejemplo:

$$3x + y = 7$$

Observamos que los coeficientes $a_1 = 2$ y $b_1 = 4$ de la primer ecuación no son proporcionales a los coeficientes $a_2 = 3$ y $b_2 = 1$ de la segunda, así que el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

tendrá una única solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que no son paralelas ni coincidentes y la solución es el punto $3, -2$.

c. El sistema tenga infinitas soluciones.

Las ecuaciones deben ser equivalentes (los coeficientes y los términos independientes son proporcionales).

- Ecuación dada: $2x + 4y = -2$.
- Multiplicamos por 2: $4x + 8y = -4$.

- Sistema:
$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ 4x + 8y = -4 \end{cases}$$
.

En este caso, la representación gráfica de las dos ecuaciones es la misma recta.

d. El sistema no tenga soluciones.

Las rectas que gráficamente representan a cada ecuación lineal del sistema deben ser paralelas (misma pendiente) pero no coincidentes (diferente ordenada al origen b).

- Ecuación dada: $2x + 4y = -2 \implies y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (pendiente $-\frac{1}{2}$).
- Segunda ecuación: $x + 2y = 2 \implies y = -\frac{1}{2}x + 1$ (pendiente $-\frac{1}{2}$, diferente ordenada al origen b).

- Sistema:
$$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
.

Solución del ejercicio 5

Para cada inciso construiremos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Utilizaremos los coeficientes dados y determinando las constantes b_1 y b_2 según las condiciones.

Si un punto $P = (x, y)$ debe ser solución, sustituiremos sus coordenadas para hallar b_1 y b_2 . Si no debe ser solución, ajustaremos b_1 o b_2 para que al menos una ecuación falle.

- a. $a_{11} = 2, a_{12} = 6, a_{21} = 6, a_{22} = 7, P = (1, 4)$ es solución.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 2x + 6y = b_1 \\ 6x + 7y = b_2 \end{cases}$$

Sustituyendo $P = (1, 4)$

$$\begin{cases} 2(1) + 6(4) = b_1 \\ 6(1) + 7(4) = b_2 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$b_1 = 2 + 24 = 26 \quad y \quad b_2 = 6 + 28 = 34$$

Entonces, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 26 \\ 6x + 7y = 34 \end{cases}$$

- b. $a_{11} = -1, a_{12} = 4, a_{21} = 6, a_{22} = 0, P = (3, 6)$ no es solución.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -1x + 4y = b_1 \\ 6x + 0y = b_2 \end{cases}$$

Para asegurar que $P = (3, 6)$ no sea solución, P

$$\begin{cases} -1(3) + 4(6) \neq b_1 \\ 6(3) + 0(6) \neq b_2 \end{cases}$$

Resolviendo para valores que no satisfacen tenemos que:

$$-3 + 24 \neq b_1 \quad y \quad 18 \neq b_2$$

Es decir, $b_1 \neq 21$ y $b_2 \neq 18$. Podemos tomar pues, por ejemplo, $b_1 = 10$ y $b_2 = 19$ y las ecuaciones obtenidas satisfarán las condiciones solicitadas.

El sistema de ecuaciones que hemos elegido es:

$$\begin{cases} -1x + 4y = 10 \\ 6x = 19 \end{cases}$$

Una elección diferente de b_1 y b_2 que satisfagan la condición de $b_1 \neq 21$ y $b_2 \neq 18$ arrojará como resultado otro sistema de ecuaciones que responde a las condiciones solicitadas en el enunciado.

- c. $a_{11} = 4, a_{21} = 2, b_1 = 9, b_2 = 17, P = (1, 5)$ es solución.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 4x + a_{12}y = 9 \\ 2x + a_{22}y = 17 \end{cases}$$

donde a_{12} y a_{22} son los coeficientes desconocidos.

Sabemos que el punto $P = (1, 5)$ es una solución, por lo que sustituimos $x = 1$, $y = 5$ en ambas ecuaciones para encontrar a_{12} y a_{22} .

Primera ecuación

$$\begin{aligned}4(1) + a_{12}(5) &= 9 \\4 + 5a_{12} &= 9 \\5a_{12} &= 5 \\a_{12} &= 1\end{aligned}$$

Segunda ecuación

$$\begin{aligned}2(1) + a_{22}(5) &= 17 \\2 + 5a_{22} &= 17 \\5a_{22} &= 15 \\a_{22} &= 3\end{aligned}$$

Solución

El sistema de ecuaciones que cumple las condiciones dadas es:

$$\begin{cases}4x + y = 9 \\2x + 3y = 17\end{cases}$$

Verificación

Verifiquemos que $P = (1, 5)$ satisface el sistema:

- Primera ecuación: $4(1) + 5 = 4 + 5 = 9$. Se cumple.
- Segunda ecuación: $2(1) + 3(5) = 2 + 15 = 17$. Se cumple.

El sistema satisface todas las condiciones.

Solución del ejercicio 6

A continuación, se resuelven seis sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución. En este método, se despeja una variable de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, resolviendo paso a paso hasta encontrar los valores de x y y . Se presentan las soluciones con explicaciones detalladas.

a.
$$\begin{cases}x + y = 3 \\x + 2y = -8\end{cases}$$

- (1) De la primera ecuación, despejamos x : $x = 3 - y$.
- (2) Sustituimos en la segunda ecuación: $3 - y + 2y = -8$.
- (3) Simplificamos: $3 + y = -8$, por lo tanto, $y = -11$.
- (4) Sustituimos $y = -11$ en $x = 3 - y$: $x = 3 - (-11) = 14$.

Solución

$$x = 14, y = -11$$

Observación. En notación de conjuntos la solución anterior se escribe de la siguiente manera:

$$S = \{(x, y) = (14, -11)\}$$

De aquí en adelante utilizaremos la notación de conjunto para expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\text{b. } \begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -3x - 9y = 1 \end{cases}$$

- (1) De la primera ecuación, despejamos x : $3x = -9y$, $x = -3y$.
- (2) Sustituimos en la segunda ecuación: $-3(-3y) - 9y = 1$.
- (3) Simplificamos: $9y - 9y = 1 \implies 0 = 1$, lo que es una contradicción.
- (4) La ecuación resultante es una contradicción, por lo tanto, el sistema es **incompatible** y **no tiene solución**.

Solución.

El sistema no tiene solución.

Observación. Sistemas incompatibles.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones que se resuelven simultáneamente, es decir, buscamos los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones al mismo tiempo.

¿Qué es un sistema incompatible?

Un **sistema incompatible** es aquel sistema de ecuaciones que **no tiene ninguna solución**; es decir, no existe ningún conjunto de valores para las incógnitas que satisfaga todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Esto ocurre cuando, al resolver el sistema, se llega a una contradicción, como por ejemplo una igualdad imposible del tipo $0 = 1$, como en el apartado anterior.

Interpretación geométrica

En el caso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, un sistema incompatible representa dos rectas **paralelas** que nunca se encuentran, y por lo tanto, no tienen punto de intersección.

En resumen

- Un sistema incompatible **no tiene solución**.
- Aparece una contradicción al resolverlo.
- En el plano, representa dos rectas paralelas no coincidentes.

Un sistema incompatible es aquel que no admite ninguna solución.

$$\text{c. } \begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

- (1) De la primera ecuación, despejamos x : $3x = 7y - 5$, $x = \frac{7y - 5}{3}$.
- (2) Sustituimos en la segunda ecuación: $4\left(\frac{7y - 5}{3}\right) - 3y = -2$.
- (3) Multiplicamos por 3: $4(7y - 5) - 9y = -6$.
- (4) Simplificamos: $28y - 20 - 9y = -6$, $19y - 20 = -6$, $19y = 14$, $y = \frac{14}{19}$.
- (5) Sustituimos $y = \frac{14}{19}$ en $x = \frac{7y - 5}{3}$: $x = \frac{7\left(\frac{14}{19}\right) - 5}{3} = \frac{\frac{98}{19} - \frac{95}{19}}{3} = \frac{1}{19}$.

Solución

$$S = \left\{ (x, y) = \left(\frac{1}{19}, \frac{14}{19} \right) \right\}.$$

d.
$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ -5x - y = -3 \end{cases}$$

- (1) De la primera ecuación, despejamos y : $y = 3 - 5x$.
- (2) Sustituimos en la segunda ecuación: $-5x - (3 - 5x) = -3$.
- (3) Simplificamos: $-5x - 3 + 5x = -3$
 $-3 = -3$
Hemos obtenido una identidad.
- (4) Esto indica infinitas soluciones: $y = 3 - 5x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Solución

El sistema tiene infinitas soluciones. Considerando $x = t$, podemos expresar la solución del sistema en forma paramétrica de la siguiente manera:

$$S = \{(t, 3 - 5t), t \in \mathbb{R}\}$$

e.
$$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases}$$

- (1) De la primera ecuación, despejamos x : $4x = -5y$, $x = -\frac{5y}{4}$.
- (2) Sustituimos en la segunda ecuación: $-4\left(-\frac{5y}{4}\right) - 2y = 6$.
- (3) Simplificamos: $5y - 2y = 6$, $3y = 6$, $y = 2$.
- (4) Sustituimos $y = 2$ en $x = -\frac{5y}{4}$: $x = -\frac{5(2)}{4} = -\frac{5}{2}$.

Solución

$$S = \left\{ (x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 2 \right) \right\}.$$

f.
$$\begin{cases} 9x + 11y = 20 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$$

- (1) De la segunda ecuación, despejamos x : $8x = 7y + 1$, $x = \frac{7y+1}{8}$.
- (2) Sustituimos en la primera ecuación: $9\left(\frac{7y+1}{8}\right) + 11y = 20$.
- (3) Multiplicamos por 8: $9(7y + 1) + 88y = 160$.
- (4) Simplificamos: $63y + 9 + 88y = 160$, $151y + 9 = 160$, $151y = 151$, $y = 1$.
- (5) Sustituimos $y = 1$ en $x = \frac{7y+1}{8}$: $x = \frac{7(1)+1}{8} = 1$.

Solución

$$S = \{(x, y) = (1, 1)\}.$$

Solución del ejercicio 7

La técnica de eliminación de Gauss es un método sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en realizar operaciones elementales sobre las ecuaciones para transformar el sistema en una forma equivalente donde una variable se elimina progresivamente, hasta obtener una ecuación con una sola incógnita. Las operaciones elementales permitidas son:

- Intercambiar dos ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por una constante no nula.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

El objetivo es reducir el sistema a una **forma triangular superior**, resolver la variable restante y luego usar sustitución regresiva para encontrar las demás variables.

Cuando decimos que **un sistema de ecuaciones lineales está expresado en forma triangular superior**, nos referimos a que el sistema ha sido organizado de tal manera que **cada ecuación sucesiva tiene una incógnita menos** que la anterior, y todas las incógnitas están ordenadas de forma descendente (por ejemplo, (x, y, z)). Un sistema triangular superior de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas generalmente tiene esta forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

A continuación, se resuelven seis sistemas de ecuaciones lineales utilizando este método, mostrando cada paso con una flecha que indica la operación realizada. Se aplican operaciones elementales (suma, resta o multiplicación) para eliminar variables y obtener un sistema de ecuaciones en forma escalonada. Se incluyen explicaciones detalladas.

Durante el desarrollo del *método de eliminación de Gauss*, cada ecuación se simboliza con la letra E con un subíndice que indica el número de ecuación. Para este ejercicio:

- E_1 : Ecuación 1 del sistema.
- E_2 : Ecuación 2 del sistema.

Cabe señalar también que a medida que se avanza en el desarrollo del método, de izquierda a derecha, se van indicando simbólicamente sobre una flecha las operaciones elementales realizadas sobre cada una de las ecuaciones del sistema. **A modo de ejemplo** analicemos el siguiente paso de un sistema de ecuaciones a otro equivalente en el que se ha eliminado una variable de una de las ecuaciones realizando *operaciones elementales* entre ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{cases} \xrightarrow{E_2 - 2 \cdot E_1 \rightarrow E_2} \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -7y = -14 \end{cases}$$

La secuencia de operaciones elementales realizadas es la siguiente:

- En primer lugar, multiplicamos la primera ecuación por 2 para que el coeficiente de x sea igual al de la segunda ecuación:

$$2(2x + 3y = 8) \implies 4x + 6y = 16$$

- A continuación restamos la primera ecuación del nuevo resultado:

$$(4x - y) - (4x + 6y) = 2 - 16$$

$$4x - y - 4x - 6y = -14$$

$$-7y = -14$$

Es decir, la ecuación 2 del nuevo sistema de ecuaciones es el resultado de haber restado el doble de la ecuación 1, de la ecuación 2 del sistema de ecuaciones previo.

Como indicamos previamente, el intercambio de dos ecuaciones es una operación elemental permitida que generará un sistema de ecuaciones equivalente. Vale la pena pues, mencionar que el intercambio de ecuaciones se indicará con el símbolo " \leftrightarrow ". Por ejemplo, la expresión: $E_3 \leftrightarrow E_1$ indica que en el nuevo sistema se ha intercambiado la ecuación 3 con la ecuación 1.

Resolvamos a continuación el ejercicio:

a.
$$\begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = -8 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 - E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = -11 \end{array} \right.$$

Finalmente, para obtener el valor de x sustituimos $y = -11$ en E_1 : $x + (-11) = 3 \implies x = 14$.

Solución

$$S = \{(x, y) = (14, -11)\}.$$

b.
$$\begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 9y = 0 \\ -3x - 9y = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 + E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 9y = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \right.$$

(1) La operación elemental $E_2 + E_1$ se detalla a continuación:

$$(3x + 9y) + (-3x - 9y) = 0 + 1$$

$$(3x - 3x) + (9y - 9y) = 1$$

$$0 + 0 = 1$$

$$0 = 1$$

(2) La ecuación $0 = 1$ es una contradicción, lo que indica que el sistema no tiene solución.

Solución.

Como el proceso de eliminación lleva a una contradicción, el sistema es **incompatible**. Es decir, **no existe ningún par de valores (x, y) que satisfaga ambas ecuaciones al mismo tiempo.**

El sistema no tiene solución.

$$c. \quad \begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{4 \cdot E_1 \rightarrow E_1 \\ 3 \cdot E_2 \rightarrow E_2}} \left\{ \begin{array}{l} 12x - 28y = -20 \\ 12x - 9y = -6 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 - E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} 12x - 28y = -20 \\ 19y = 14 \end{array} \right.$$

En el último sistema obtenido, despejamos y de E_2 : $y = \frac{14}{19}$.

A continuación sustituimos $y = \frac{14}{19}$ en E_1 para obtener el valor de x : $12x - 28\left(\frac{14}{19}\right) = -20 \implies 12x - \frac{392}{19} = -20 \implies 12x = \frac{392}{19} - 20 \implies 12x = \frac{12}{19} \implies x = \frac{1}{19}$.

Solución

$$S = \left\{ (x, y) = \left(\frac{1}{19}, \frac{14}{19} \right) \right\}.$$

$$d. \quad \begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 3 \\ -5x - y = -3 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 + E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 3 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

La segunda ecuación indica infinitas soluciones. De E_1 : $5x + y = 3 \implies y = 3 - 5x$.

Solución:

Infinitas soluciones. Tomando $x = t$ como parámetro:

$$S = \left\{ (x, y) = (t, 3 - 5t), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$e. \quad \begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y = 0 \\ -4x - 2y = 6 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 + E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y = 0 \\ 3y = 6 \end{array} \right.$$

En el último sistema obtenido despejamos y de E_2 : $3y = 6 \implies y = 2$.

Finalmente sustituimos $y = 2$ en E_1 : $4x + 5(2) = 0 \implies 4x + 10 = 0 \implies 4x = -10 \implies x = -\frac{5}{2}$.

Solución

$$S = \left\{ (x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 2 \right) \right\}.$$

$$f. \quad \begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9x + 11y = 20 \\ 8x - 7y = 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{8 \cdot E_1 \rightarrow E_1 \\ 9 \cdot E_2 \rightarrow E_2}} \left\{ \begin{array}{l} 72x + 88y = 160 \\ 72x - 63y = 9 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 - E_1 \rightarrow E_2} \left\{ \begin{array}{l} 72x + 88y = 160 \\ -151y = -151 \end{array} \right.$$

En el último sistema obtenido despejamos y de E_2 : $-151y = -151 \implies y = 1$.

Finalmente sustituimos el valor obtenido $y = 1$ en E_1 : $72x + 88(1) = 160 \implies 72x = 160 - 88 \implies 72x = 72 \implies x = 1$.

Solución

$$S = \{(x, y) = (1, 1)\}.$$

Solución del ejercicio 8

A continuación, se resuelven los seis sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación o sustitución, según sea más apropiado. Cada solución se detalla paso a paso.

$$\text{a. } \begin{cases} E_1: & 2x + 3y - 8z = -47 \\ E_2: & x + y + z = 3 \\ E_3: & 5x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

- **Método de eliminación de Gauss:** el objetivo es eliminar variables para obtener un sistema triangular superior y luego resolver por sustitución regresiva. Se recomienda volver a leer la explicación dada al inicio del Ej. 7. Allí se dan los detalles de cómo se utiliza el método.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 3y - 8z = -47 \\ x + y + z = 3 \\ 5x + 2y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - 8z = -47 \\ 5x + 2y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 - 5E_1 \rightarrow E_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 10z = -53 \\ -3y - 4z = -11 \end{cases} \\ & \xrightarrow{E_3 + 3E_1 \rightarrow E_3} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 10z = -53 \\ -34z = -170 \end{cases} \quad \boxed{\text{Sistema triangular superior}} \end{aligned}$$

De la última ecuación despejamos z : $-34z = -170 \implies z = \frac{-170}{-34} \implies z = 5$.

A continuación realizaremos **sustitución regresiva** sobre E_2 y luego sobre E_3 en el último sistema de ecuaciones obtenido.

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando } z = 5 \text{ en } E_2 \text{ y despejamos } y: & y - 10 \cdot 5 = -53 \\ & y - 50 = -53 \\ & y = -53 + 50 \\ & y = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora reemplazamos } y = -3 \text{ y } z = 5 \text{ en } E_1 \text{ y despejamos } x: & x + (-3) + 5 = 3 \\ & x + 2 = 3 \\ & x = 3 - 2 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

Solución Final

$$S = \{(x, y, z) = (1, -3, 5)\}.$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 \\ 5x + 6y + z = 1 \\ -17x + 3y + 6z = 1 \end{cases}$$

- **Método de Eliminación:** combinaremos las ecuaciones para eliminar una variable mediante multiplicaciones y sumas o restas de ecuaciones. Esto permitirá reducir el sistema a dos ecuaciones con dos variables, que se resolverán posteriormente.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 1 & (1) \\ 5x + 6y + z = 1 & (2) \\ -17x + 3y + 6z = 1 & (3) \end{cases}$$

Paso 1. Eliminar z entre ecuaciones (1) y (2):

- Multiplicamos la ecuación (2) por 2 y la sumamos con la ecuación (1) para poder eliminar z :

$$\begin{aligned} (2x - 3y - 2z) + (10x + 12y + 2z) &= 1 + 2 \\ 12x + 9y &= 3 \end{aligned}$$

- Simplificamos la ecuación anterior dividiendo por 3:

$$4x + 3y = 1 \quad (4)$$

Paso 2. Eliminar z entre ecuaciones (1) y (3):

- Multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la sumamos con la ecuación (3) para poder eliminar z :

$$\begin{aligned} (6x - 9y - 6z) + (-17x + 3y + 6z) &= 3 + 1 \\ -11x - 6y &= 4 \end{aligned}$$

- Simplificamos la ecuación anterior dividiendo por -1:

$$11x + 6y = -4 \quad (5)$$

Con las nuevas ecuaciones (4) y (5) formamos un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos variables:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & (6) \\ 11x + 6y = -4 & (7) \end{cases}$$

Paso 3. Resolver el nuevo sistema:

- Usamos eliminación nuevamente, multiplicamos la ecuación (6) por 2 para igualar el coeficiente de y :

$$8x + 6y = 2$$

- Restamos la ecuación (7) de esta última:

$$\begin{aligned} (8x + 6y) - (11x + 6y) &= 2 + 4 \\ -3x &= 6 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Paso 4. Sustituir el valor de x obtenido en la ecuación (6) del nuevo sistema:

$$\begin{aligned} 4(-2) + 3y &= 1 \\ -8 + 3y &= 1 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Paso 5. Sustituir los valores de x e y obtenidos en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 2(-2) - 3(3) - 2z &= 1 \\ -4 - 9 - 2z &= 1 \\ -13 - 2z &= 1 \\ -2z &= 14 \\ z &= -7 \end{aligned}$$

Solución Final

$$S = \{(x, y, z) = (-2, 3, -7)\}$$

c.
$$\begin{cases} E_1: & x - 2y + 3z = 11 \\ E_2: & 4x + y - z = 4 \\ E_3: & 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

- **Método de eliminación de Gauss:** el objetivo es eliminar variables para obtener un sistema triangular superior y luego resolver por sustitución regresiva.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 - 4E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 9y - 13z = -40 \\ 3y - 3z = -12 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{3}E_2 \\ E_2 \leftrightarrow E_3 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ y - z = -4 \\ 9y - 13z = -40 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3 - 9E_2 \rightarrow E_3} \begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ y - z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases} \quad \boxed{\text{Sistema triangular superior}}$$

De la última ecuación despejamos z : $-4z = -4 \implies z = \frac{-4}{-4} \implies z = 1$.

A continuación realizaremos **sustitución regresiva** sobre E_2 y luego sobre E_3 en el último sistema de ecuaciones obtenido.

Reemplazando $z = 1$ en E_2 y despejamos y : $y - 1 = -4 \implies y = -4 + 1 \implies y = -3$.

Ahora reemplazamos $y = -3$ y $z = 1$ en E_1 y despejamos x : $x - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = -11 \implies x + 6 + 3 = -11 \implies x = -11 - 6 - 3 \implies x = -20$.

Solución Final

$$S = \{(x, y, z) = (2, -3, 1)\}$$

d.
$$\begin{cases} E_1: & x + y - z = 7 \\ E_2: & 4x - y + 5z = 4 \\ E_3: & 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

- Aplicaremos el **Método de eliminación de Gauss**: aprovecharemos que la primera ecuación tiene coeficiente 1 en su primer variable e iremos eliminando variables de las otras dos ecuaciones para obtener un sistema triangular superior. Luego resolveremos por sustitución regresiva.

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 4x - y + 5z = 4 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 - 4E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + y - z = 7 \\ -5y + 9z = -24 \\ -1z = -14 \end{cases} \quad \text{Sistema triangular superior}$$

De la última ecuación despejamos z : $-z = -14 \implies z = 14$.

A continuación realizaremos **sustitución regresiva** sobre E_2 y luego sobre E_3 en el sistema de ecuaciones triangular superior obtenido.

Reemplazando $z = 14$ en E_2 y despejamos y : $-5y + 9 \cdot 14 = -24$

$$\begin{aligned} -5y + 126 &= -24 \\ -5y &= -24 - 126 \\ y &= \frac{-150}{-5} \\ y &= 30 \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos $y = 30$ y $z = 14$ en E_1 y despejamos x : $x + 30 - 14 = 7 \implies x = 7 - 30 + 14 \implies x = -9$.

Solución Final

$$S = \{(x, y, z) = (-9, 30, 14)\}$$

e.
$$\begin{cases} E_1: & -2x - 6y - 3z = 9 \\ E_2: & -x + y - z = 1 \\ E_3: & x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

- Aplicaremos el **Método de eliminación de Gauss**: aprovecharemos las ecuaciones que tienen primer coeficiente igual a 1, que nos facilitarán las operaciones de eliminación de variables de las otras dos ecuaciones para luego obtener un sistema triangular superior. Finalmente resolveremos por sustitución regresiva.

$$\begin{cases} -2x - 6y - 3z = 9 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + y - z = 1 \\ -2x - 6y - 3z = 9 \end{cases} \begin{array}{l} E_2 + E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 + 2E_1 \rightarrow E_3 \end{array} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ z = 3 \\ -8y + z = 13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -8y + z = 13 \\ z = 3 \end{cases} \quad \boxed{\text{Sistema triangular superior}}$$

De la última ecuación tenemos que $z = 3$.

A continuación realizaremos **sustitución regresiva** sobre E_2 y luego sobre E_3 en el sistema de ecuaciones triangular superior obtenido.

Reemplazando $z = 3$ en E_2 y despejamos y : $-8y + 3 = 13 \quad -8y = 13 - 3 \quad y = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$.

Ahora reemplazamos $y = -\frac{5}{4}$ y $z = 3$ en E_1 y despejamos x : $x - \left(-\frac{5}{4}\right) + 2 \cdot 3 = 2 \Rightarrow x + \frac{5}{4} + 6 = 2 \Rightarrow x = 2 - 6 - \frac{5}{4} \Rightarrow x = -\frac{21}{4}$.

Solución final

$$S = \left\{ (x, y, z) = \left(-\frac{21}{4}, -\frac{5}{4}, 3 \right) \right\}$$

f.
$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

- **Método de Sustitución:** para resolver este sistema utilizaremos el método de sustitución. Este método consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones y luego sustituirla en las otras ecuaciones para determinar el valor de las incógnitas. .

$$-x + z = 0 \tag{1}$$

$$y + 3z = 1 \tag{2}$$

$$x - y = -3 \tag{3}$$

Paso 1. Despejar variables.

De la primera ecuación:

$$-x + z = 0 \Rightarrow z = x$$

Sustituimos $z = x$ en la segunda ecuación:

$$y + 3x = 1 \tag{4}$$

Despejando en la tercera ecuación:

$$x - y = -3 \Rightarrow x = y - 3$$

Paso 2. Sustituir en la ecuación (4).

Sustituimos $x = y - 3$ en la ecuación (4):

$$y + 3(y - 3) = 1$$

Resolvemos para y :

$$\begin{aligned}y + 3y - 9 &= 1 \\4y &= 10 \\y &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Paso 3. Encontrar x e z .

Sustituimos $y = \frac{5}{2}$ en $x = y - 3$:

$$x = \frac{5}{2} - 3 = \frac{5}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$$

Dado que $z = x$ entonces:

$$z = -\frac{1}{2}$$

Solución Final

$$S = \left\{ (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$